Dispense di Meccanica e Fisica Sperimentale

Matteo Della Rocca

21 ottobre 2019

Indice

1 Appendice

1.1 Accenni ai concetti di limite, derivate e integrali

In queste dispense non siamo ovviamente interessati a spiegare come risolvere il calcolo di limiti, derivate e integrali nè si è intenzionati a enunciare e dimostrare i numerosi teoremi dell'analisi matematica, ma semplicemente si vuole che lo studente prenda dimestichezza con i simboli dell'analisi e il loro significato.
L'analisi matematica nasce nel 1600 contemporaneamente alla fisica. Il concetto di limite, alla base di questo ramo della matematica, fu infatti introdotto per la prima volta, da un punto di vista pratico, dal fisico Isaac Newton. A partire dalla definizione di velocità media:

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

si nota che se Δt è zero, calcolare la velocità è impossibile. L'intenzione di Newton è proprio quella di calcolare la *velocità istantanea* e per questo introduce il concetto di limite. Il limite è un operatore matematico che consente di fare calcoli anche con quantità particolari, come appunto quelle infinitesime. Da un punto di vista intuitivo il limite risponde alla domanda cosa succede alla variabile dipendente se la variabile indipendente tende ad un certo valore? Si scrive:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5}{x} = \infty$$

e si legge limite per x che tende a zero di 5 su x uguale a infinito. Allo stesso modo si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1000}{x} = 0$$

A partire dalla definizione di limite si arriva a quella di derivata. Quest' ultima è definita infatti come limite del rapporto incrementale, cioè:

$$\dot{x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Per prima cosa chiariamo il significato di rapporto incrementale. Esso ci dice sostanzialmente quanto aumenta (o diminuisce) la variabile dipendente all' aumentare della variabile indipendente. I più attenti avranno notato che la definizione operativa del rapporto incrementale coincide con la formula usata per il calcolo della pendenza di una retta passante per due punti. Immaginiamo di considerare una funzione qualsiasi passante per i punti P_1 e P_2, il rapporto incrementale ci permette di calcolare la pendenza della secante per questi due punti. Tenendo fisso P_1, avviciniamo P_2 sempre di più. In questo modo, la secante diventa la tangente alla curva in P_1. Da un punto di vista analitico quello che facciamo è il seguente limite:

$$\lim_{x_{P_2} \to x_{P_1}} \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}}$$

Notiamo che questa quantità è per definizione la derivata prima di y valutata in P_1. Avendo però sottolineato la relazione tra rapporto incrementale e coefficiente angolare della secante, possiamo affermare che, da un punto di vista geometrico, la derivata di una funzione, valutata in un punto P, permette di calcolare il coefficiente angolare della tangente alla funzione stessa in P.
Per definizione la velocità istantanea è la derivata della posizione rispetto al tempo. Infatti:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \dot{x} \tag{2}$$

dove x in questo caso è la posizione ed essa è naturalmente funzione del tempo. Allo stesso modo possiamo affermare che l'accelerazione istantanea è la derivata della velocità rispetto al tempo. Diremo quindi che l'accelerazione è per definizione la derivata seconda della posizione rispetto al tempo:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)}{t - t_0} = \ddot{x} \tag{3}$$

Infine per completezza, parliamo anche dell'integrale che, per comodità, definiamo semplicemente come operazione inversa della derivata. D'altronde, vale in generale per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) \tag{4}$$

L'integrale nella formula è un integrale indefinito. In fisica molto spesso si fa uso degli integrali definiti, quest' ultimi danno come risultato un numero e non una funzione, per esempio:

$$\int_1^2 2x\,dx = \left|x^2\right|_1^2 = 4 - 1 = 3$$

2 Strumenti di misura

[1] Uno strumento di misura è un dispositivo destinato ad essere utilizzato per effettuare delle misure. Si parla di campioni di misura o misura materializzata per indicare strumenti che rappresentano uno specifico valore della grandrezza che si vuole misurare. Gli strumenti di misura forniscono in generale un'indicazione di tipo analogica o digitale. Nel primo caso un ago si posiziona lungo una scala graduata. Se invece l'indicazione è digitale l'uscita è data da un numero che rappresenta il valore della grandezza di interesse.

2.1 Caratteristiche

1. Condizioni di lavoro:
   valori della grandezza per cui lo strumento funziona correttamente
2. Condizioni di funzionamento:
   condizioni meteorologiche per il corretto funzionamento
3. Condizioni di riferimento:
   condizioni prescritte per controllare le prestazioni
4. Tempo di risposta
5. Prontezza:
   velocità di adeguamento ad un nuovo stimolo
6. Sensibilità:
   rapporto tra cambiamento d risposta e cambiamento di stimolo
7. Soglia di discriminazione: la più grande variazione di segnale che non provoca un cambiamento di risposta
8. Zona morta:
   intervallo di valori in cui non ho variazione di risposta
9. Risoluzione:
   la più piccola differenza di indicazione che può essere percepita.

2.2 Strumenti analogici

Negli strumenti con indicazione analogica la scala consiste in un insieme ordinato di segni (tacche) per lo più equidistanziati e numerati. Un indice permette di leggere sulla scala il valore indicato dallo strumento. Esso può essere costituito ad esempio da una lancetta, un fascetto di luce o la superficie di un liquido, Spesso, negli strumenti di precisione, l'ago è particolarmente sottile e una superficie speculare lungo la scale serve a ridurre l'errore di parallasse. Le tacche dividono l'estensione della scala in divisioni. È importante notare che le scale analogiche sono fatte per una indicazione continua dei valori misurati, ovvero è lecito e doveroso interpolare fra le tacche se la qualità della misura lo richiede.

[1] Sezione a cura di Alex Boris Katlan.

Termometro Il termometro a mercurio è uno strumento che ci permette di effettuare misure di temperatura. Come tutti gli strumenti analogici esso è dotato di una scala con vicino alcuni valori di riferimento.

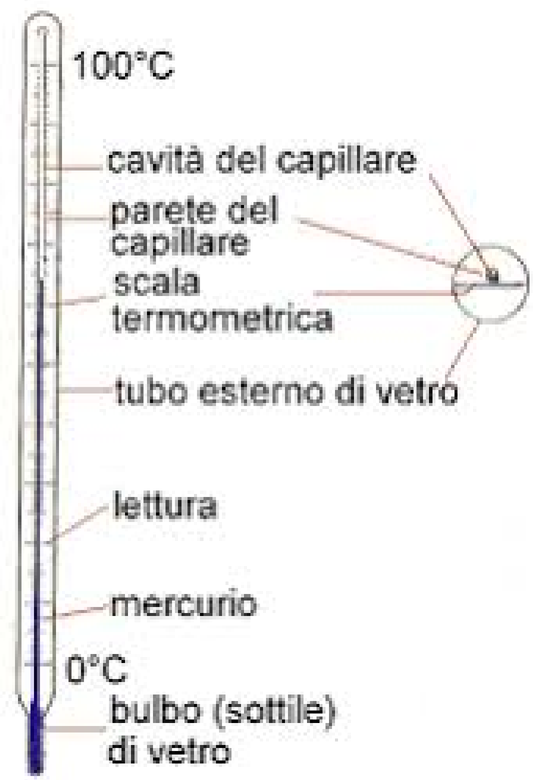

Figura 1: In figura la schematizzazione di un termometro

I termometri basano Il loro funzionamento fisico sull'utilizzo di una qualche grandezza fisica che varia con La variazione della temperatura. Tale variazione può essere:

1. Dilatazione termica di una sostanza liquida, gassosa o solida (es. termometri a mercurio,termometro a gas, termometro a lamina bimetallica)
2. Resistenza elettrica di un materiale (es. termometro a termocoppia)
3. altri principi

La realizzazione della scala è la seguemte: immergiamo il termometro in un bagno di acqua e ghiaccio, attendiamo esso giunga all'equilibrio e segnamo lo 0, in un sistema contenente acqua in ebbolizzione segniamo il valore 100. Si divide la scala in opportuni intervalli.

Calibro a nonio Il calibro è uno strumento di misura della lunghezza, adatto a misurare la larghezza di un oggetto, la distanza tra due facce piane in una concavità, la profondità di un solco o foro filettato. Il calibro a scorrimento (note anche come calibro a corsoio a nonio o calibro Vernier), come mostrato in figura, è un regolo graduato di acciaio inossidabile costituito da due parti che scorrono assialmente tra loro e dotato di appendici (becchi, aste) che servono da battuta per le quote da misurare. Si definisce parte 'fissa' o corpo la parte che reca la gradazione principale, mentre l'altra si definisce parte mobile, o semplicemente corsoio. Il corsoio dispone di un sistema di bloccaggio per evitare di perdere accidentalmente la misura durante la manipolazione dello strumento. La massima apertura del calibro è la portata.
Nel calibro a nonio, la scala principale sul corpo è millimetrata mentre sul corsoio vengono lette le frazioni di millimetri grazie all'incisione dei noni, una scala graduata di ampiezza complessiva pari ad una frazione

di quella principale. I noni possono essere decimali, ventesimali o cinquantesimali, e conseguentemente la risoluzione dello strumento potrà essere di 0,1 - 0,05 - 0,02 mm. La graduazione sul nonio viene realizzata per i calibri n-simali in maniera tale che n divisioni del nonio corrispondono a (n-1) divisioni della scala fissa. Per esempio nel nonio decimale (ventesiemale) divindendo in 10 (20) parti 9 (19) millimetri della scala principale. Dette rispettivamente D e d le lunghezze della divisione della scala fissa e del nonio, si ha (n-1)D=nd, per cui D-d=D/n. Nel calibro ventesimale D = 1mm, n=20 per cui D/n= 0.05 mm. Lo zero del nonio costituisce l'indice dello strumento, in assenza di oggetti da misurare coincide (dovrebbe) con lo zero della scala fissa.
Quando effettuiamo una misura l'indice del nonio si troverà in genere fra due divisioni della scala fissa. La lunghezza da leggere si ottiene sommando:

1. la parte principale: la lettura, data dalla gradazione che procede lo zero del nonio.
2. La parte frazionaria: la quantità x pari alla distanza fra questa gradazione e l'indice stesso. La presenza del nonio consente di misurare x: individuata da quale divisione del nonio (ad esempio la k-esima) meglio coincide con la divisione della scala fissa.

Si ricava x = k D - k d = k (D-d) = k D/n.

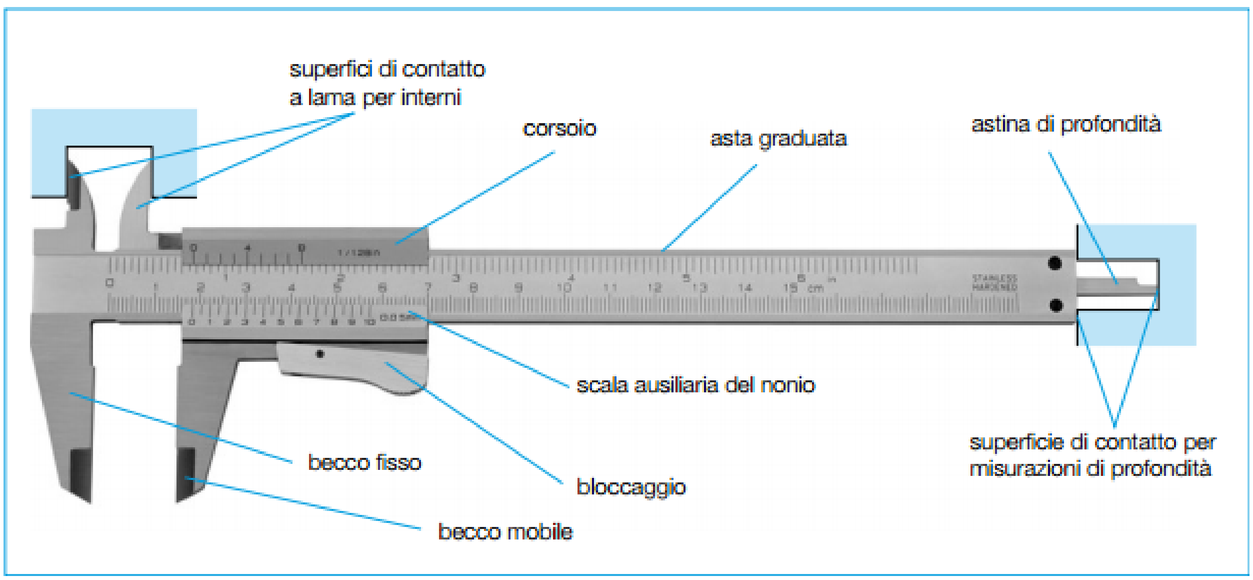

Figura 2: In figura la schematizzazione di un calibro a nonio ventesimale

Bilancia Una bilancia di misura (normalmente detta "bilancia") è un dispositivo per la misura della massa di un oggetto. Le bilance sono spesso usate per la misura di quello che noi chiamiamo "peso di una persona" o di qualunque altra cosa.

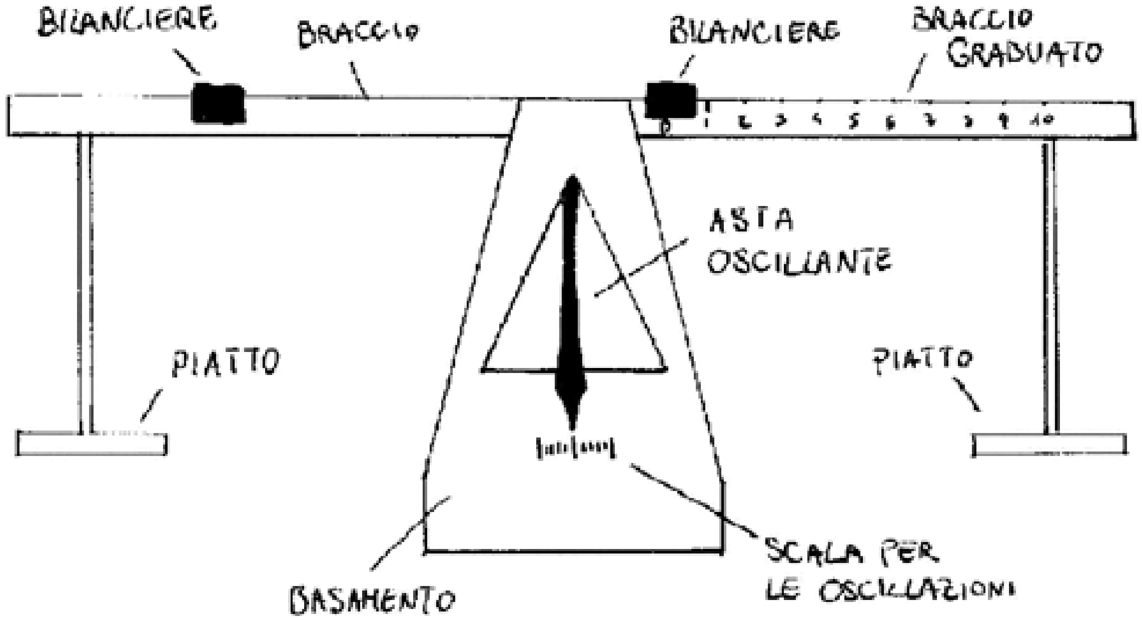

Figura 3: In figura la schematizzazione di una bilancia

Una bilancia (anche detta bilancia graduata o bilancia da laboratorio). Nella sua accezione standard, questo tipo di strumento di misura confronta l'oggetto, posizionato in uno dei piatti di misura, e sospeso tramite una leva, con una massa di riferimento o combinazione di masse nel piatto opposto (peso di riferimento). Ci sono bilance che misurano il peso, cioè la forza prodotta dalla massa in un campo gravitazionale, e non la massa, la quale invece non è dipendente dalla forza di gravità. La massa è normalmente espressa in grammi, chilogrammi, libbre, once.

2.3 Strumenti digitali

Nel caso di strumenti ad uscita digitale la scala è digitale e fornisce ovviamente una indicazione discontinua del valore della misura. Comunque tale discontinuità diventa insignificante quando l'incremento digitale (cioè la differenza fra due valori numerici successivi dovuti ad una variazione della cifra meno significativa) è minore dell'incertezza di misura. Per intervallo di scala di strumenti digitali si intende la variazione della grandezza fisica che corrisponde all'incremento digitale della scala. Gli strumenti digitali che utilizzeremo nelle esperienze di laboratorio sono il cronometro, la bilancia ed i sensori di moto collegati al computer. Il loro funzionamento generale è noto, mentre i dettagli saranno discussi direttamente in laboratorio. L'unico commento che vogliamo dare, comune a tutti gli strumenti digitali, è sull'incertezza di misura di questi strumenti. Poiché il risultato della misura è riportato su un display in forma numerica con un certo numero di cifre significative possiamo assumere l'incertezza standard da associare alla lettura è uguale all'intervallo diviso $\sqrt{12}$. Uno strumento digitale è il cronometro che permette di effettuare misure di tempo.

3 Approccio statistico alla fisica Sperimentale

3.1 Misure e errore Gaussiano

Ogni qualvolta effettuiamo una misura commettiamo inevitabilmente un errore. Per questo motivo a ogni misura viene associata un'incertezza. Non è la misura in sè ad essere affetta da incertezza, in quanto esso è un dato che abbiamo ottenuto e di cui siamo certi. Il valore a cui siamo interessati è, però, quello vero della grandezza che stiamo misurando e non possiamo affermare che si sia ottenuto proprio quel valore esatto.
Gli errori che commettiamo quando prendiamo una misura possono essere di due tipi:

- *incertezze di tipo A*: rappresentano degli errori casuali che si verificano durante la misurazione, a media nulla che non possiamo verificare e di cui non ci accorgiamo.
- *incertezze di tipo B*: rappresentano gli errori noti già precedentemente la misurazione, sono legati per esempio agli strumenti utilizzati.

Quando effettuiamo una misura quindi dobbiamo tener conto di questi due tipi di errori e l'incertezza totale sulla misura sarà data da entrambi i fattori. Il fisico e matematico tedesco Guass trovò una funzione che permetteva di descrive le fluttuazioni intorno al valore medio di misure astronomiche. Empiricamente si è mostrato che tale funzione descrive le fluttuazioni casuali che si verificano solitamente quando effettuiamo una qualsiasi misurazione. La funzione di Gauss ci permette quindi di stimare, nella maggior parte dei casi, le incertezze di tipo A:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}] \tag{5}$$

La teoria statistica che ci permette di conoscere date le misure il valore vero μ e il coefficiente σ è l'inferenza. Per quanto riguarda le incertezze di tipo B la situazione è spesso più complessa, ci basta sapere che nelle incertezze di tipo B ricadono quelli dovuti agli strumenti. Naturalmente l'errore complessivo che si ha sulla misura saà dato dalla somma in quadratura delle due:

$$\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \tag{6}$$

3.2 Deviazione Standard e Media

Il termine σ è un parametro di dispersione, che che può essere ottenuto tramite un procedimento chiamato inferenza. Esso esprime la fluttuazione intorno al valore vero del misurando. Nel caso gaussiano si mostra che la miglior stima del valore vero è rappresentata dalla media, mentre l'incertezza si può ottenere attraverso la deviazione standard, definita come la radice quadrata dello scarto quadratico medio. Lo scarto è definito come la differenza fra la misura e il valore medio, che abbiamo detto "coincidere" con il valore vero. La media degli scarti è, ovviamente nulla, per cui calcoliamo la media dei quadrati, trovando così quella che chiamiamo varianza:

$$Var = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_\mathrm{i} - \bar{x})^2}{N} \tag{7}$$

La radice quadrata di questa grandezza è la deviazione standard che coincide nel caso guassiano con il parametro σ. Si noti che all'aumentare delle misure l'incertezza tande a zero. Per cui nell'ipotesi in cui fosse possibile eseguire un numero infinito di misure l'incertezza sarebbe dovuta solo al limite fisico rappresentato dalla sola precisione degli strumenti.
La media così come la singola misura è una variabile casuale descritta anch'essa da una guassiana. L'incertezza in questo caso sarà la deviazione standard precedentemente ottenuta diviso radice di n, cioè:

$$\sigma_{\bar{\mathrm{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{Var}{n}} \tag{8}$$

Dove n è il numero di misure effettuate.

3.3 Propagazione dell'incertezze

Molto spesso dalle misure effettuate otteniamo altre grandezze fisiche. Naturalmente avendo un'incertezza sulle misure dirette dovremmo trasferire queste incertezze anche sulle misure indirette. Per far questo sfruttiamo le propietà delle varianza per le combinazioni lineari di variabili indipendenti. Si ha infatti:

$$var[aX + b] = a^2 var[X] \qquad var[aY + bX] = a^2 var[Y] + b^2 var[X] \tag{9}$$

Partendo da queste proprietà e ricordando che una funzione qualsiasi può essere scritta sottoforma di polinomio, si ottiene una formula generale, valida sempre (o quasi), per stimare l'incertezza nel caso di misure indirette. Nel caso in cui la funzione sia del tipo:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \tag{10}$$

Dove le variabili sono tutte fra loro indipendenti, otteniamo:

$$r^2 = \sum_{k=1}^{N} {\alpha_i}^2 r[x_i]^2 \tag{11}$$

Dove per r si intende l'errore relativo cioè:

$$r = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \tag{12}$$

3.4 Come considerare le conoscenze pregresse nel caso di variabili gaussiane

Ogni volta che effettuiamo delle misure, per fornire la miglior stima della grandezza di interesse, con il relativo errore, dobbiamo considerare le conoscenze pregresse che abbiamo su quel determinato fenomeno. Per far ciò usiamo ancora una volta la statistica. In particolare nel caso, più comune, in cui le variabili di interesse siano di tipo gaussiano, possiamo utilizzare la media pesata per fornire la miglior stima del valore vero della grandezza di interesse. Immaginiamo di ripetere più volte uno stesso esperimento. Ogni volta otteniamo un determinato valore medio $\bar{x}_i$ con una determinata incertezze σ_i, per fornire la miglior stima di x, combiniamo i risultati tramite la media pesata dei valori medi. I pesi statistici sono rappresentati dalle incertezze. In formule:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{x}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{13}$$

Naturalmente dovremo fornire il valore di x con una determinata incertezza. Anche le incertezze vengono fra loto combinate secondo la seguente relazione:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{14}$$

4 Meccanica

4.1 Sistemi di riferimento e primo principio della dinamica

Nella dinamica, la scelta del sistema di riferimento è fondamentale. Il principio di relatività di Eistein ci dice, infatti, che esistono dei particolari sistemi di riferimento, detti inerziali, nei quali le leggi fondamentali della fisica hanno la stessa forma. È necessario, quindi, stabilire quali sistemi di riferimento sono inerziali e quali no. In realtà questo problema ha origini più antiche: già Galileo, avendo formulato un primo principio della relatività, studiò i sistemi di riferimento inerziali. Riordinando gli studi del fisico italiano, Newton enunciò il primo principio della dinamica: esiste almeno un sistema di riferimento inerziale in cui un corpo libero si muove di moto rettilineo uniforme (anche con velocità nulla). Dove per corpo libero si intende un corpo non soggetto a forze o soggetto a forze la cui risultante è nulla. Grazie a Newton sappiamo che esiste almeno un sistema di riferimento inerziale e sappiamo che caratteristiche ha, ma non abbiamo completamente risolto il problema: qual è questo sistema di riferimento? Nel corso del XX secolo è stato trovato un sistema di riferimento assoluto, apparentemente fisso, e quindi inerziale. È facile verificare che un sistema di riferimento che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a quello assoluto è anch'esso inerziale. Possiamo, dunque trovare infiniti sistemi di riferimento inerziali. Inoltre, molti sistemi di riferimento non inerziali, come la Terra, vengono spesso considerati per comodità inerziali. Si tratta, dunque, di un approssimazione, che è lecita se siamo interessati a esperienze o effetti limitati nel tempo e nello spazio. Per esempio, non possiamo considerare la Terra un sistema di riferimento inerziale quando spariamo un missile o navighiamo nell'Oceano. Considerando la Terra un sistema di riferimento inerziale, un qualsiasi altro sistema di riferimento in quiete o che si muove di moto rettilineo uniforme è anch'esso un sistema di riferimento inerziale. Un ascensore o una piattaforma roteante sono esempi di sistemi di riferimento accelerati e, quindi, non inerziali.

4.2 Passare da un sistema di riferimento all'altro

Prima di proseguire nella trattazione sulla dinamica è necessario vedere come la posizione, la velocità e l'accelerazione cambiano, passando da un sistema di riferimento ad un altro. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale che indichiamo con S e un sistema di riferimento in moto S'. Considerando il tempo e lo spazio assoluti si ha:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R} \tag{15}$$

Dove $\vec{r}$ è la posizione nel sistema di riferimento assoluto, $\vec{r'}$ è la posizione in S' e $\vec{R}$ è la posizione di S' rispetto a S. Derivando e utilizzando le relazione di Poisson, otteniamo la legge più generale per la trasformazione della velocità:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_\tau \quad dove \quad \vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{V} \tag{16}$$

Dove: $\vec{v}$ è la velocità nel sistema di riferimento assoluto, $\vec{v'}$ è la velocità nel sistema di riferimento S', $\vec{v}_\tau$ è la velocità di trascinamento, $\vec{\omega}$ è la velocità angolare con cui ruota il sistema di riferimento S', mentre $\vec{V}$ è la velocità di traslazione del sistema di riferimento S'. Derivando nuovamente otteniamo:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co} \tag{17}$$

Dove: $\vec{a}$ è l'accelerazione nel sistema di riferimento assoluto, $\vec{a'}$ è l'accelerazione nel sistema di riferimento S', $\vec{a}_\tau$ è l'accelerazione di trascinamento, mentre $\vec{a}_{co}$ è l'accelerazione di completamento o di Coriolis. In particolare si ha:

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r'}] \qquad \vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v'} \tag{18}$$

Dove $\vec{A}$ è l'accelerazione di traslazione rettilinea del sistema di riferimento S' e $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare di S'.

Cerchiamo di capire, con dei semplici esempi, qual è il significato fisico dei vari termini che compaiono nelle formule (16),(17) e (18). Consideriamo la Terra il sistema di riferimento assoluto S e consideriamo due semplici sistemi di riferimento non inerziali, un ascensore e una piattaforma roteante. L'ascensore compie un moto di traslazione, per cui la velocità e l'accelerazione angolare sono entrambi nulli. Questo significa che le leggi di trasformazione si semplificano notevolmente, infatti si ha:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V} \qquad \vec{a} = \vec{a'} + \vec{A}$$

Nel caso particolare in cui l'ascensore si muove a velocità costante, quello che otteniamo è un sistema di riferimento inerziale. Le leggi di trasformazione che otteniamo sono quelle di Galileo:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V} \qquad \vec{a} = \vec{a'}$$

Notiamo quindi che l'accelerazione è la stessa, cambiando sistema di riferimento. Diciamo, dunque, che l'accelerazione è invariante per trasformazioni di Galileo.

Per quanto riguarda la piattaforma roteante, invece, la componente traslatoria è nulla, cioè:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'} \qquad \vec{a} = \vec{a'} + \vec{\alpha} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r'}] + 2\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

Anche in questo caso notiamo che se la piattaforma ruota a velocità costante le equazioni si semplificano ulteriormente, tuttavia non si ottiene in questo caso un sistema di riferimento inerziale perchè il sistema risulta comunque accelerato: la velocità è costante solo in modulo! Due termini legati alla rotazione su cui è opportuno soffermarsi sono l'accelerazione di Coriolis e l'accelerazione centripeta. L'accelerazione centripeta è data dal termine: $\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']$. Essa è diretta sempre verso il centro del cerchio che approssima localmente traiettoria percorsa dal corpo. L'accelerazione di Coriolis è un termine che non compare in ogni sistema roteante: come si nota dal prodotto vettoriale, questo termine compare solo se il corpo cambia la propria distanza dall'asse di rotazione della piattaforma.

4.3 Forze apparenti e secondo principio della dinamica

Sapendo ora come passare da un sistema di riferimento inerziale a uno non inerziale possiamo generalizzare le leggi della fisica nei casi in cui i sistemi di riferimento non sono inerziali. Consideriamo il secondo principio della dinamica, come enunciato da Newton: in un **sistema di riferimento inerziale** un corpo subisce un'accelerazione se su di esso agisce una forza, fra la forza e l'accelerazione istante per istante vale la relazione: $F = ma$. Se il sistema di riferimento non è inerziale basterà riscrivere l'accelerazione che si ha nel sistema assoluto usando la relazione (17). In questo modo vengono evidenziati i ruoli svolti da quelle che chiamiamo forze apparenti, inerziali o pseudoforze. L'esistenza di queste forze non permette di applicare i principi della dinamica ai sistemi di riferimento non inerziali. Le più comuni fra le forze apparenti sono la forza centripeta e la forza di traslazione rettilinea. Possiamo sperimentare entrambe stando in macchina: quando facciamo una curva ci sentiamo spingere verso l'esterno, quando invece freniamo siamo spinti in avanti. Il primo effetto è dovuto alla forza centrifuga, il secondo invece alla forza di traslazione rettilinea. Altra pseudo-forza è la forza di Coriolis, di cui sentire gli effetti è più raro, ma che ha importanti conseguenze sulla navigazione e il volo.

4.4 Applicazione del secondo principio della dinamica

Possiamo applicare il secondo principio della dinamica a varie situazioni. Immaginiamo per esempio di avere una molla di costante elastica k posta verticalmente, alla quale è appesa un corpo di massa m. Il secondo principio della dinamica ci permette di trovare il punto di equilibrio x_0, dove $\vec{a}$ è nulla. Sul peso attaccato alla mola agisce la forza peso e la forza di richiamo della molla, che per la legge di Hook è:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \tag{19}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che la forza elastica è una forma di richiamo, mentre $\vec{x}$ rappresenta l'allungamento della molla dalla propria posizione a riposo. Tale allungamento può essere ovviamente positivo o negativo.
Scelto un sistema di riferimento rivolto verso l'alto e proiettando le forze otteniamo:

$$-kx - mg = ma$$

Poichè sappiamo che nella posizione di equilibrio, l'accelerazione è nulla, si ottiene:

$$x = \frac{-mg}{k}$$

Dove il segno meno ̀dovuto al fatto che la molla risulta essere allungata verso il basso. Altra cosa che possiamo ricavare è il periodo di oscillazione della mola, dato dalla formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Poniamo ora la molla in un ascensore che si muove di moto uniformemente accelerato (con accelerazione A) verso il basso. Essendo il sistema di riferimento non inerziale, dobbiamo anche considerare l'effetto delle pseudo-forze (vedi i paragrafi 4.2 e 4.3). Scegliendo lo stesso sistema di riferimento si ottiene:

$$-kx - mg + mA = ma$$

La forza apparente non influisce sul periodo di oscillazione della molla, ma solo sulla sua posizione di equilibrio. Si ha infatti che:

$$x_0 = \frac{m(A-g)}{k}$$

Notiamo che se $g > A$, la molla risulta allungata, altrimenti essa è compressa.

4.5 Dinamica dei sistemi e terzo principio della dinamica

Un sistema è dato da un insieme di corpi, di cui si vogliono studiare le caratteristiche. Le due equazioni fondamentali per lo studio dei sistemi, dette equazioni cardinali, sono:

$$\frac{dP}{dt} = M^e \qquad \frac{dQ}{dt} = F^e \tag{20}$$

Dove P è il momento angolare del sistema, Q è la quantità di moto del sistema, M^e e F^e sono rispettivamente il momento risultate delle forze esterne e la forza esterna risultante. Ma cosa si intende per forze esterne? Definito un sistema, chiamiamo forze interne quelle dovute alle interazioni fra i corpi che appartengono al sistema, e chiamiamo forze esterne tutte le altre. Per esempio, immaginiamo di avere due palline legate da una molla poste su di un tavolo. Poichè la scelta del sistema è arbitraria potremmo considerare come sistema le due palline e la molla, in questo caso la molla rappresenta una forza interna, mentre l'attrito delle palline sul tavolo e la forza di gravità forze esterne. Altrimenti, potremmo considerare anche il tavolo come parte del sistema, e in questo caso sarebbe una forza interna anche l'attrito.
Quello che comunque possiamo notare che in un sistema isolato, ovvero dove $M^e = 0$ e $F^e = 0$, il momento angolare e la quantità di moto si conservano. Questo è appunto il terzo principio della dinamica, nella sua formulazione più generale.

4.6 Urti elastici e anaelastici

Nella meccanica dei sistemi un fenomeno molto importante è l'urto. Gli urti infatti permettono lo studio di fenomeni molto più complessi, si pensi per esempio all'esperimento di Rutherford. Sappiamo per il terzo principio della dinamica che in un sistema isolato, cioè su cui non agiscono forze esterne o comunque la loro risultante è nulla, la quantità di moto e il momento angolare si conservano. Quasi mai due particelle che si scontrano rappresentano un sistema isolato, tuttavia essendo l'urto un fenomeno istantaneo, possiamo trascurare tutte le forze esterne che non sono impulsive. Per cui, in assenza di forze esterne impulsive, negli urti si conservano sia la quantità di moto che il momento angolare.
Altra distinzione riguarda gli urti elastici e gli urti anaelastici: diciamo che un urto è elastico se si conserva l'energia cinetica del sistema, altrimenti diciamo che è anaelastico. Non tutti gli urti anaelastici sono uguali, una prima distinzione riguarda gli urti endoenergetici e quelli esoenergetici. Inoltre esistono dei coefficienti che ci dicono quanto un urto è anaelastico, come il Q-valore e, soprattutto, il coefficiente di restituzione. Questo ultimo è definito come:

$$e = \frac{J_r}{J_d} \tag{21}$$

Dove J_d è l'impulso di deformazione, mentre J_r è l'impulso di restituzione. Nella prima fase dell'urto i due oggetti rallentano, deformandosi, fino a avere velocità nulla. Nella seconda fase, invece, i due corpi accelerano, acquistando, parzialmente o completamente, la loro forma originaria. Nella prima fase abbiamo quindi un impulso di deformazione, nella seconda un impulso di restituzione. Ricordando che $J = \Delta q$ per il teorema dell'impulso e che $q = mv$ per definizione, possiamo riscrivere:

$$e = \frac{q_f}{q_i} \qquad e = \frac{v_f}{v_i}$$

Dove q e v sono rispettivamente la quantità di moto e la velocità relativa dei due corpi. Solitamente i due oggetti non riacquistano la forma originale ma rimangono deformati, per cui si ha $J_d > J_r$, il che implica che il coefficiente di restituzione è minore di 1. Conoscendo la velocità prima e dopo l'urto è facile calcolare il coefficiente di restituzione.

4.7 Accenni alla fluidodinamica

Descrivere il moto dei fluidi è piuttosto complesso e possiamo utilizzare due procedimenti diversi. Abbiamo, infatti, la descrizione lagrangiana, che richiede la conoscenza della posizione nel tempo di ogni singola particella di cui è composto il fluido, o alternativamente possiamo far uso della descrizione euleriana, che, invece, ci permette di descrivere il moto del fluido presuppondo che le particelle che si trovano in una determinata regione dello spazio hanno la stessa velocità.
Utilizzando la descrizione euleriana, giungiamo al teorema di Bernouilli, valido per i fluidi ideali (non viscosi e incompressibili) in moto stazionario (cioè che non cambia nel tempo) e non rotazionale:

$$\frac{p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} + h = costante \tag{22}$$

Dove p è la pressione del fluido in un punto, g è l'accelerazione di gravità, v è la velocità del fluido e h è la quota o altezza effettiva. Questo teorema ci dice sostanzialmente che cambiando in ogni punto del fluido vale la relazione (22), dove i vari termini possono assumere valori diversi ma la loro somma si mantiene costante.

4.8 Viscosità e attrito del mezzo

La viscosità è una grandezza fisica che permette di quantificare gli attriti interni del fluido e si misura tramite il coefficiente di viscosità η. Ma la viscosità ha anche un'altra importante applicazione. Sappiamo che un corpo in moto è sottoposto all'attrito del mezzo in cui si muove. Per velocità basse, quando il moto è detto laminare, la legge di Stokes ci dice che:

$$F_a = \beta\vec{v} \tag{23}$$

Il coefficiente β è il coefficiente di attrito e dipende dalle caratteristiche del corpo e dalla viscosità del fluido. A partire dalla legge di Stokes è possibile calcolare β e per particolari corpi è possibile ricavare anche η. Per esempio nel caso di una sfera di raggio R, che si muove in un fluido con viscosità η, si ha:

$$\beta = 6R\pi\eta$$

4.9 Principio di Archimede

Oltre alla fluidodinamica, è doveroso introdurre qualche nozione di statica dei fluidi. Già gli antichi greci erano a conoscenza di alcuni semplici leggi che regolano il galleggiamento dei corpi.
Un corpo immerso in un fluido, compresa, quindi, l'aria è sottoposta ad una forza verso l'alta, nota come spinta di Archimede. È tale forza, per esempio, che consente ai palloncini gonfiati ad elio di sollevarsi e volare via. In altre parole, potremmo affermare che il palloncino "galleggia nell'aria". Archimede postulò quindi il principio che porta il suo nome:
Un corpo immerso in acqua è sottoposto ad una forza verso l'alto pari a:

$$S = -g\rho_a V_o \tag{24}$$

dove:

- g è l'accelerazione di gravità;
- ρ è la densità dell'acqua;
- V_o è il volume immerso nel fluido.

Si noti che in generale il volume immerso nel fluido non è uguale al volume totale dell'oggetto. Pensiamo a una nave da crociera, il volume immerso nel fluido non è chiaramente uguale al volume totale.
Infine, dobbiamo considerare che il principio di Archimede è più propriamente un teorema. Si riporta una semplice dimostrazione. Consideriamo una certa quantità d'acqua ferma, per esempio un lago. Prendiamo una piccola porzione del lago ad una certa profondità h. Abbiamo supposto che il lago sia fermo, dunque anche la nostra porzione resta ferma nella sua posizione. Supponiamo che la nostra porzione abbia una massa m. Essa è chiaramente soggetta ad una forza peso pari a $P_a = m_a g$. Stimare la massa della porzione, però

non è cosi semplice per cui solitamente usiamo il volume, considerando la definizione di denisità: $m_a = V_a \rho_a$. Per cui $P_a = g V_a \rho_a$. Ora affinchè la porzione sia ferma deve esistere una forza diretta verso l'alto che bilanica la forza peso, cioè:

$$S = -g \rho_a V_a$$

Nella (24) compare però il volume dell'oggetto e non quella dell'acqua, questo perchè per ottenere la forza esceritata sul corpo dovremmo considerare una massa d'acqua di volume uguale al volume dell'oggetto, per cui dobbiamo scegliere $V_a = V_o$.