

Pendolo

Matteo Della Rocca, Boris Katlan

Marzo 2021

Sommario

Si è realizzato un apparato sperimentale in grado di rilevare le oscillazioni del pendolo usando arduino per la raccolta e l'analisi dei dati. Tale analisi dati ha consentito di valutare l'accelerazione di gravità g .

Indice

1	Introduzione	2
2	Apparato Sperimentale	2
3	Misure di periodo	4
4	Conclusioni	6

1 Introduzione

Il pendolo è uno dei primi sistemi fisici studiati. Newton lo usò per testare sperimentalmente per la prima volta l'equivalenza fra la massa gravitazionale e inerziale. In questo caso si è interessati a ricavare una stima dell'accelerazione di gravità g attraverso l'applicazione di arduino. L'accelerazione di gravità g si può ricavare misurando la pulsazione ω del sistema.

Usando l'equazione di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ e scegliendo un sistema di riferimento locale è immediato mostrare che:

$$m_I \ddot{s} = -m_G g \sin \alpha, \quad (1)$$

dove m_I è la massa inerziale e m_G è la massa gravitazionale. Supponendo che $m_I = m_G$, usando la definizione di angoli in radianti e l'approssimazione di piccole oscillazioni, si ottiene:

$$\ddot{s} + \frac{gs}{L} = 0, \quad (2)$$

dove L è la lunghezza del filo. L'equazione (2) si può confrontare con l'equazione dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{L}. \quad (3)$$

Risolvendo l'equazione differenziale (3), si ottiene:

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \phi_0), \quad (4)$$

dove:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad g = \omega^2 L, \quad (5)$$

Si noti che l'equazione (3) si riferisce a oscillazioni intorno alla posizione di riposo $x_0 = 0$. Nell'espressione (4) x_0 è generico.

2 Apparato Sperimentale

L'apparato sperimentale si discosta dal classico "pendolo" formato da un pesetto appeso ad un filo. Poichè si vuole ricostruire la traiettoria del pendolo c'è bisogno di conoscere la posizione occupata dal pendolo che oscilla. Si è pensato di far osciarre direttamente tutta una struttura su cui è stato montato Arduino con un sensore di posizione in grado di acquisire dati relativi alla posizione.

Per realizzare tale apparato sperimentale si sono utilizzate le seguenti componenti:

- Arduino
- Sensore di posizione HC-SR04
- Batteria da 5V
- Cavi vari e materiali vari (filo, nastro adesivo)

Per l'assemblaggio si fa riferimento alla seguente figura che riassume il circuito:

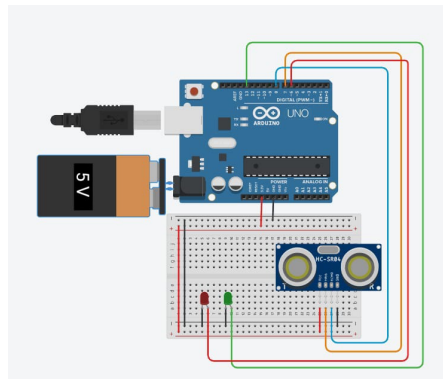


Figura 1: Schema dei collegamenti del circuito.

Si è optato per una struttura rettangolare, di dimensioni tali da riuscire a contenere tutti i componenti. Durante la fase di assemblaggio si è fatto molta attenzione a distribuire il peso dei componenti in maniera uniforme su tutta la struttura, di modo che, una volta messo in oscillazione, il pendolo non si inclinasse compromettendo la presa dei dati.

I componenti del sensore di posizione sono stati montati esterni alla struttura. Di seguito alcune foto illustrative permettono di visualizzare meglio l'apparato sperimentale finale.

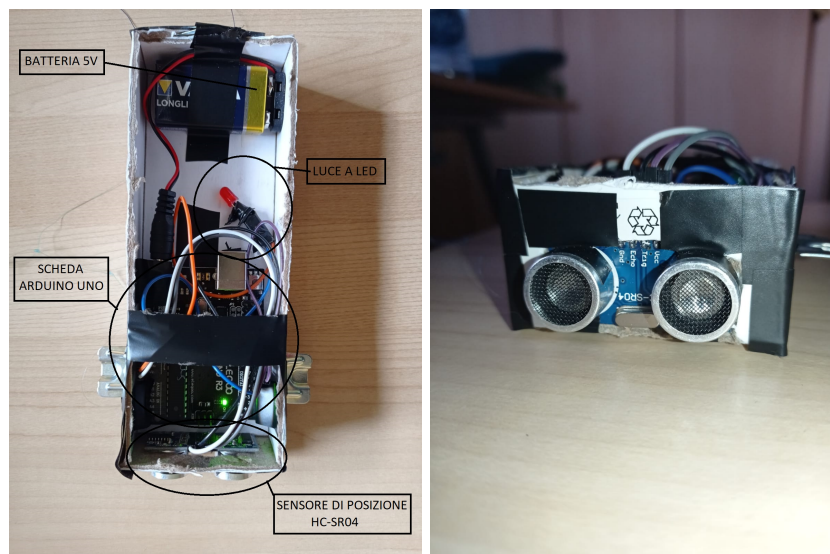


Figura 2: In figura viene mostrato come sono stati sistemate ed assemblate le varie componenti dell'apparato sperimentale.

3 Misure di periodo

Le misure vengono effettuate dal sensore di posizione HC-SR04 che campiona ad una frequenza di 50 Hz. Le oscillazioni sono piccole in modo da avere misure compatibili con l'approssimazione di piccole oscillazioni per le quali si ottiene la formula (2) e per le quali si può considerare la distanza misurata come una buona approssimazione della posizione occupata dal pendolo che oscilla. Durante la presa di queste misure si è anche fatto attenzione a che il pendolo non iniziasse a ruotare e che quindi oscillasse sempre lungo la stessa direzione.

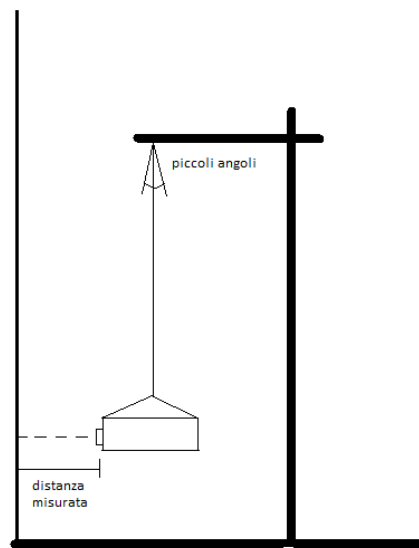


Figura 3: In figura viene mostrato uno schema che illustra meglio la posizione occupata dall'apparato sperimentale.

In figura 4 vengono riportati i grafici da cui tramite fit sono stati estrapolati i sette valori di frequenza, raccolti in tabella 1 con la relativa incertezza. I dati sperimentali sono riportati in blu ed è possibile confrontare il loro andamento con il grafico ottenuto tramite fit, riportato in rosso.

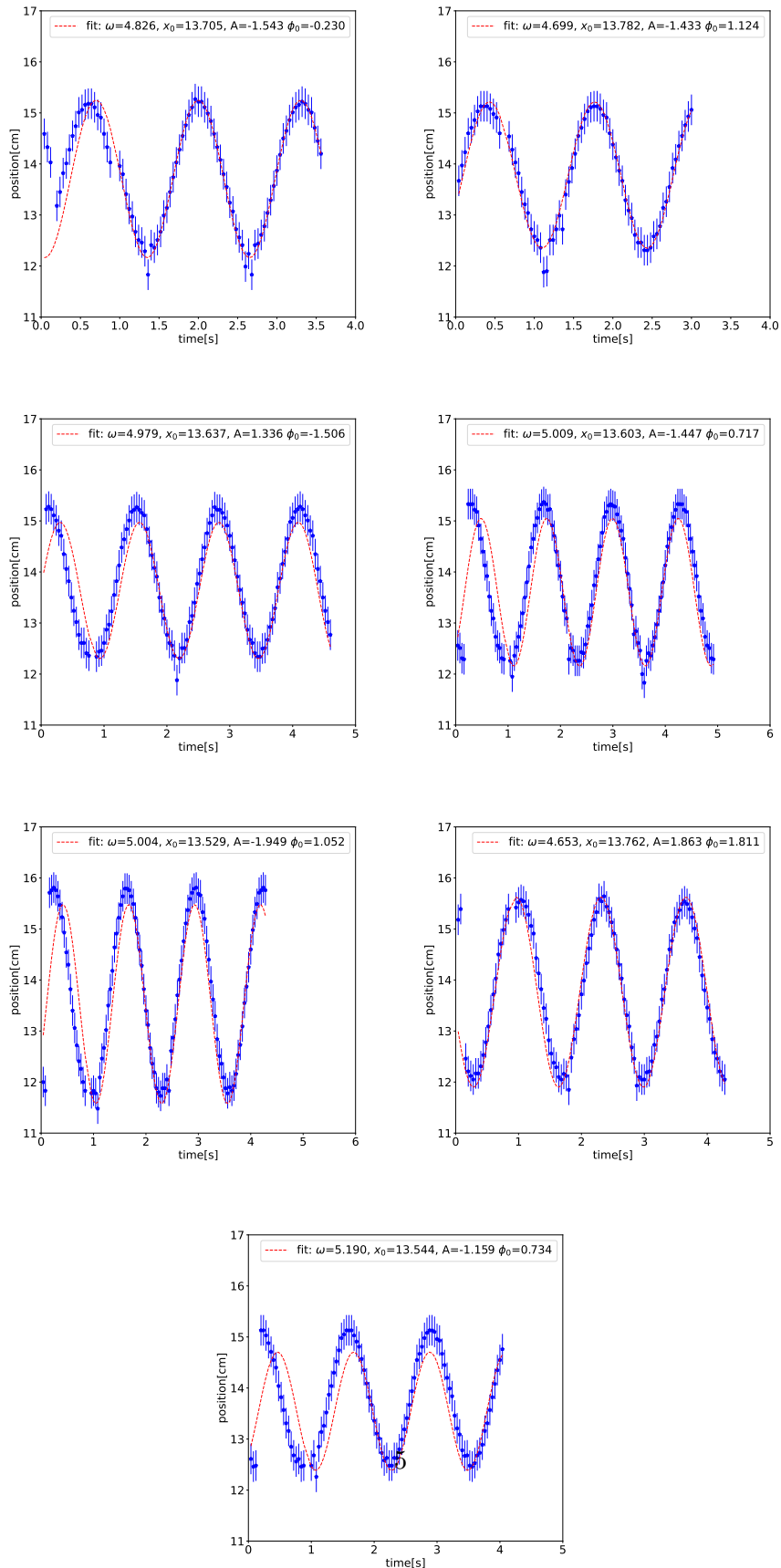


Figura 4: In figura vengono riportati i sette grafici con il fit della funzione $f(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) + x_0$. In blu sono riportati i punti sperimentali e in rosso la curva ottenuta tramite fit. Il valore della frequenza ω è usato per stimare g .

I sette valori riportati in tabella 1 sono associati alla misura ripetuta di una stessa grandezza e si suppone che ogni misura migliori le conoscenze a priori della successiva.

Tabella 1: In tabella sono riportati i valori di ω ottenuti tramite il fit.

	ω (Hz)
1	4.826 ± 0.018
2	4.69911 ± 0.00052
3	4.9792 ± 0.0093
4	5.0086 ± 0.0065
5	5.0043 ± 0.0063
6	4.6526 ± 0.0055
7	5.190 ± 0.020

Si calcola allora la media pesata fra i valori di ω fornendo la migliore stima:

$$\omega = [4.70300 \pm 0.00036] \text{ Hz.} \quad (6)$$

Usando la seconda delle equazioni (5) si può calcolare il valore di g , propagando le incertezze:

$$g = [9.64 \pm 0.22] \text{ m/s}^2, \quad (7)$$

il valore ottenuto può essere confrontato con il valore riportato in letteratura, approssimabile entro le prime due cifre decimali con 9.81 m/s^2

4 Conclusioni

I grafici riportati in figura 4 mostrano qualitativamente un buono accordo fra i dati sperimentali e la funzione utilizzata per fare il fit, ottenuta risolvendo l'equazione differenziale (2) e riportata nella (4). Il valore ottenuto di g riportato nella (7) è compatibile entro un σ con il risultato riportato in letteratura approssimabile con 9.81 m/s^2 .